Rainer Stumpe

Der perplexe Navigator

Navigation mit dem Rechenschieber

Mit 116 Abbildungen und 68 Tabellen

RWS Verlag

November 2001
RWS Verlag, Mannheim
Herstellung: Libri Books on Demand
Printed in Germany ISBN 3-8311-3176-7

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Ich habe im Kurs für den BR-Schein die Navigation als eine intellektuell stimulierende Aufgabe erlebt. Irgendwie erinnerte mich das Konstruieren von Dreiecken an meine Schulzeit. Da hatte ich sogar freiwillig einen Kurs in Darstellender Geometrie besucht. Mit der dunklen Erinnerung an die Schulzeit und der vagen Vorstellung, das Ganze habe etwas mit Trigonometrie zu tun, diskutierten wir mit Segelfreunden über ein paar Flaschen Wein über Navigationshilfsmittel und das Für und Wider von Computern an Bord. Jochen hatte eine revolutionäre Vorstellung: wenn man Software für die Navigation schreiben kann, dann gibt es Algorithmen. Wenn man Algorithmen hat, kann man auch mit anderen Hilfsmitteln - z. B. einem Rechenschieber - die Aufgabe lösen. Der Rechenschieber - so argumentierte er, denn er hatte einen von seinem Vater, einem Ingenieur, geerbt - hat keine Batterien, und wenn er 'mal nass wird, trocknet man ihn einfach ab. Einen nassen PC kann man nur noch entsorgen.

Diese Idee reizte mich, und ich suchte meine Rechenschieber im Schreibtisch und ein Trigonometriebuch aus der zweiten Reihe des Bücherschranks. Dann machte ich mich an die Arbeit und analysierte die typischen Navigationsaufgaben unter trigonometrischen Gesichtspunkten. Ziel war immer, den Rechenschieber für möglichst viele Probleme an Bord einzusetzen. So kam dann noch die Gezeitenrechnung hinzu.

Das Buch wendet sich an Sportbootführer, die Spaß an der Navigation haben, aber als Gelegenheitssegler immer wieder die Rechenregeln nachschlagen müssen, und die gerne verstehen wollen, worauf diese Regeln begründet sind. Wer irgendwann gelernt hat, mit dem Rechenschieber zu rechnen, und es eigentlich bedauert, dass dieses Gerät nun überflüssig geworden ist, findet in diesem Buch einen Grund, den Rechenschieber wieder sinnvoll einzusetzen. Natürlich kann man die Rechnungen auch mit dem Taschenrechner ausführen.

Zunächst werden wir die notwendigen Grundlagen der ebenen und sphärischen Trigonometrie einführen. Die Gleichungen werden dann bei jedem Beispiel erneut diskutiert. Im zweiten Kapitel wird das Rechnen mit dem Rechenschieber erklärt. Wer einen hat, der wird es in der Vergangenheit ja gelernt haben; wer keinen hat, der braucht dieses Kapitel nicht zu lesen - denn zu kaufen gibt es keine mehr. Der einzige Weg noch einen Rechenschieber zu erwerben, ist von einem Sammler. Es gibt (überraschend) viele Diskussionsgruppen auf dem Internet und Websites von Sammlern und Clubs. Eine Suche nach „Rechenschieber“ bei www.yahoo.de oder www.altavista.de führt sicher zum Ziel. Ein Synonym ist „Rechenstab“. Wer gerne englisch liest, kann auch nach „slide rule“ suchen.

Dann werden wir die typischen Konstruktionsaufgaben des Navigators nach den Typen ausführlich diskutieren - einschließlich der Großkreisnavigation für Atlantiküberquerer. Und schließlich werden wir die Formeln zur Gezeitenberechnungen - und zwar die nach BSH und die nach ATT - ausführlich ableiten.

Dieses Buch ersetzt kein Lehrbuch für die Führerscheinkurse, es ergänzt die empfohlenen Texte. Nicht alle prüfungsrelevanten Themen sind behandelt.

Mannheim, im Herbst 2001 Rainer Stumpe

Ein Schiff mit Landmarken zu navigieren erfordert die größte Erfahrung und die schönste Urteilfähigkeit aller Navigationsarten. Ständige Wachsamkeit, nicht nachlassende geistige Aufmerksamkeit und eine gründliche Kenntnis der Grundlagen sind notwendig. Navigationsfehler auf offener See können normalerweise erkannt und korrigiert werden, wenn man in Sichtweite zum Land kommt. Bei der Küstennavigation gibt es wenige oder gar keine Möglichkeiten, einen Fehler zu korrigieren. Schon eine kleine Flüchtigkeit kann zu einem Unglück führen.

Commander B. Dutton

1.2 Die Winkelfunktionen

Wir wenden uns nun dem interessanteren Teil der Trigonometrie zu: den Winkelfunktionen. Dieser Abschnitt legt die Grundlage für die verwendeten Bezeichnungen und Argumentationen bei der Erläuterung der Navigationsaufgaben.

1.2.1 Sinus, Cosinus, Tangens und Cotangens

Wir haben ja schon Winkel kennen gelernt (Kap. 1.1.1). Und wir haben gelernt, dass die Summe der Winkel im Dreieck 180° beträgt (Kap. 1.1.3). Was uns noch fehlt, sind die Beziehungen von Seitenlängen und Winkeln im Dreieck. Aus historischen Gründen werden diese (goniometrischen) Winkelfunktionen am rechtwinkligen Dreieck definiert.[7] Das hat den Vorteil, dass man die Länge der Hypotenuse gleich 1 setzen kann, und so bequem mit kleinen Zahlen rechnet. Da im rechtwinkligen Dreieck der rechte Winkel γ uninteressant ist, und die beiden anderen Winkel α und β die Hypotenuse als einen der Schenkel haben, spricht man von Ankathete und Gegenkathete. Die Ankathete von α ist b, die Gegenkathete a (Abbildung 10).

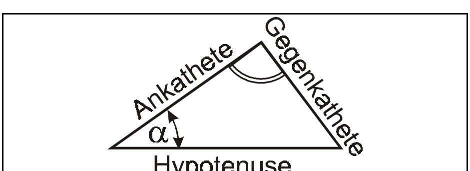

Abbildung 10: Bezeichnungen im rechtwinkligen Dreieck

Die Definition der Winkelfunktionen, die ja die Dreieckseitenverhältnisse im Bezug auf die Winkel beschreiben, lauten:

[7] Ich denke, dass die "alten Griechen" sich aus Gründen der Zahlenmystik mit dem rechtwinkligen Dreieck beschäftigt haben. Pythagoras war jedenfalls ein Zahlenmystiker und die Beziehung $3^2 + 4^2 = 5^2$ wird stark auf ihn gewirkt haben. Er wollte die Regeln für ähnliche Zahlenreihen erkennen und ist so tief in die Materie eingestiegen. Die Regel, die er abgeleitet hat, den nach ihm benannten Lehrsatz, muss heute noch jedes Kind lernen.

das Verhältnis der Gegenkathete zur Hypotenuse heißt **Sinus**

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \tag{1.4}$$

das Verhältnis der Ankathete zur Hypotenuse heißt **Cosinus**

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \tag{1.5}$$

das Verhältnis der Gegenkathete zur Ankathete heißt **Tangens**

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \tag{1.6}$$

und sein Kehrwert (Ankathete zu Gegenkathete) heißt **Cotangens**

$$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{1}{\tan\alpha} \tag{1.7}$$

Aus den Sätzen im Dreieck wissen wir, das die Katheten kürzer sind als die Hypotenuse, der Quotient einer Kathete und einer (längeren) Hypotenuse ist daher immer kleiner als oder maximal gleich 1. Der Wert des Sinus und der Wert des Cosinus ist also ≤ 1.

Die Funktionen eines spitzen Winkels sind positive Zahlen, und der Sinus und der Cosinus sind immer kleiner gleich 1[8].

Die Winkelfunktionen des gleichen Winkels (z. B. des Winkels α) stehen zu einander in Beziehungen, die man ableiten kann. Diese Beziehungen sind für das spätere Rechnen wichtig, denn mit ihrer Hilfe lassen sich Formeln in eine Form überführen, mit der man leichter rechnen kann.

Wir haben bei der Definition gelernt, dass $\sin\alpha = a / c$ und $\cos\alpha = b / c$ sind. Quadriert man die beiden Gleichungen, setzt die Länge der Hypotenuse c gleich 1 und addiert dann die beiden Gleichungen, so erhält man:

[8] Für Tangens und Cotangens kann man das nicht allgemein sagen; es hängt davon ab, welches der spitzere Winkel ist, oder anders gesagt, welches die kürzere Kathete ist. Tangens und Cotangens können größer sein als 1.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = a^2 + b^2 \tag{1.8}$$

Seit Pythagoras wissen wir, dass a² + b² = c² und da c = 1 ist auch c² = 1. Damit haben wir die Beziehung:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \tag{1.9}$$

Wenn man die Definitionen für Sinus und Cosinus dividiert, kürzt sich die Hypotenuse c aus dem Bruch heraus:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a\cdot c}{c\cdot b} = \frac{a}{b} = \tan\alpha \tag{1.10}$$

Auf gleiche Weise erhält man:

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\alpha \tag{1.11}$$

Mit solchen Rechenkunststücken kann man jede Winkelfunktion durch jede andere ausdrücken. Das Ergebnis ist die Tabelle 1. diesen Gleichungen kann man nun jede Funktion des Winkels α durch die anderen Funktionen ausdrücken:

Tabelle 1: Beziehungen der Winkelfunktionen

$\sin\alpha$	$\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$
$\cos\alpha$	$\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$
$\tan\alpha$	$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$\frac{1}{\cot\alpha}$
$\cot\alpha$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{\tan\alpha}$

Im Kapitel 1.1.1 über Winkel haben wir gelernt, dass der Winkel und sein Nebenwinkel zusammen 180° betragen. Da im rechtwinkligen Dreieck - wegen der Winkelsumme im Dreieck, die gleich 180°

ist - α + β + 90 = 180° ist α = 90° - β. Deshalb gelten im rechtwinkligen Dreieck die Winkelfunktions-Beziehungen:

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \cos(90^\circ - \alpha) \\ \cos\alpha &= \sin(90^\circ - \alpha) \\ \tan\alpha &= \cot(90^\circ - \alpha) \\ \cot\alpha &= \tan(90^\circ - \alpha) \end{aligned} \tag{1.12}$$

Daraus lässt sich der allgemeine Satz formulieren:

Jede Funktion eines spitzen Winkels ist gleich der Kofunktion[9] seines Nebenwinkels.

1.2.2 Der Arcus

Neben den vier Winkelfunktionen Sinus, Cosinus, Tangens und Cotangens gibt es noch den *Arcus.* Der Arcus ist die Länge des Kreisbogens eines Umkreises[10] des rechtwinkligen Dreiecks, der über der Gegenkathete liegt. Der Umkreis geht durch die drei Ecken des Dreiecks.

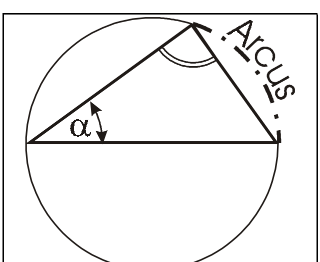

Abbildung 11: Der Kreisbogen (Arcus)

Für kleine Winkel, das sind Winkel unter 5°, ist die Länge des Kreisbogen (annähernd) gleich dem Sinus. Ein weiterer Vorteil des Arcus ist, dass man ihn in Bruchteilen der Zahl π ausdrücken kann. Der Kreisumfang U ist ja $U = 2\pi * r$, wenn r der Radius des Kreises

9 Die Paare Sinus und Cosinus und Tangens und Cotangens werden jeweils Kofunktionen von einander genannt.

10 Der Umkreis eines rechtwinkligen Dreiecks heißt Thales-Kreis. (nach Thales von Milet, * um 625 v.Chr. in Milet, † um 547 v. Chr.; Naturphilosoph.)

ist. Da der volle Umfang eines Kreises der Definition nach gleich 360° ist, entspricht einem Winkel von 90° also ein Bogen von einem Viertel des Kreisumfangs. Setzt man nun bequemerweise den Radius gleich 1, dann ist arc 90° = π / 2. Und da 45° ein Achtel des Vollkreises ist, beträgt die zu gehörige Bogenlänge π / 4. Uns interessiert am Arcus nur, dass er für Winkel < 5° zahlenmäßig mit hinreichender Genauigkeit dem Sinus entspricht.

Wenn wir jetzt einen Taschenrechner zur Hand haben, können wir schnell eine Überschlagsrechnung machen um den Fehler dieser Annahme zu bestimmen.

$$\sin 5^\circ = 0{,}08715$$

$$\frac{5^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi = 0{,}08727$$

$$\Delta = 0{,}00012$$

Nun ja, der Fehler ist wirklich klein. Wir werden im Verlaufe des Buches sehen, dass die Rechenschiebergenauigkeit immer noch größer ist als die Kurshaltefähigkeit eines durchschnittlichen Rudergängers.

1.2.3 Die Werte der Sinus- und der Cosinusfunktion

Beim Arcus haben wir schon die Winkelfunktion in einem Kreis mit dem Radius 1 erklärt. Das kann man anschaulich auch mit dem Sinus und dem Cosinus. Nur schlägt man nun den Einheits-Kreis um den Scheitel des Winkels. Die Hypotenuse soll dann der Radiusstrahl des Winkels sein. Dann ist die Länge des Lots von Ende der Hypotenuse auf die Ankathete (die x-Achse des Diagramms in Abbildung 12) der Sinus und der Cosinus ist die Länge der Strecke von Scheitel zum Lotfußpunkt.

Denn es gilt ja sin α = Gegenkathete / Hypotenuse und da die Hypotenuse gleich 1 ist, ist sin α = Gegenkathete / 1. Für den Cosinus gilt das Analoge

1.5 Sphärische Trigonometrie

Alle bisherigen Überlegungen zur Trigonometrie waren auf die Ebene beschränkt. Die Erde ist aber annähernd eine Kugel, und auf der Kugeloberfläche gelten andere Beziehungen für Winkel und Seitenlängen im Dreieck. Da diese Beziehungen die Grundlage der Navigation sind, müssen wir uns auch damit beschäftigen. Nur die Definitionen der Winkelfunktionen gelten auch in diesem Kapitel.

Mit der Anwendung der ebenen Trigonometrie machen wir bei der Berechnung von Entfernungen Fehler, denn die gekrümmte Erdoberfläche wird ja als ebene Fläche behandelt. Den Fehler, den man macht, wenn man einen Kreisbogen als gerade Strecke betrachtet, haben wir ja schon berechnet (Kap. 1.2.2). Für die typische Küstenfahrt[12] ist der Fehler nicht sehr groß, und braucht praktisch nicht berücksichtigt zu werden.

Bei Fernfahrten, z. B. einer Fahrt über den Atlantik, kann der Unterschied - wie wir sehen werden - beträchtlich sein. Der Unterschied ist umso größer, je größer das Verhältnis der Nord-Süd- zur Ost-West-Entfernung wird. Richtig wichtig wird sphärische Trigonometrie erst für das Verständnis der Astronavigation. Hier wird nämlich die Himmelskugel mit ihren Sternkoordinaten in Bezug zur Erdkugel mit den geografischen Koordinaten gesetzt.

Wir werden sehen, dass die Rechenregeln für Dreiecke auf der Kugel denen in der Ebene ähneln. Nur werden die Seitenlängen statt in Metern oder Seemeilen als Winkel[13] angegeben. Schauen wir uns einmal die Kugel an.

[12] Entspricht etwa der drei- bis fünffachen Horizontentfernung, also 10 bis 15 sm. Allerdings sollte im Abstand dieser Entfernung der Schiffsort bestimmt werden, um den Kurs entsprechend korrigieren zu können. Bei Entfernungen bis 100 sm muss man aber bereits die Kugelgestalt für Entfernungsbestimmungen berücksichtigen (s. Kap. X).

[13] Als Segler sind wir ja vertraut mit der Äquivalenz von Seemeilen und Winkeln: 1 sm entspricht 1 Bogenminute.

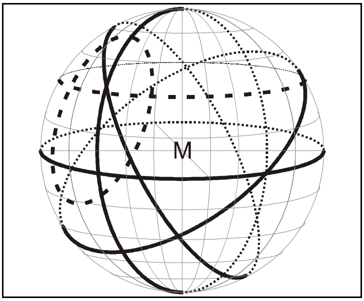

Abbildung 18: Kugel mit Groß- und Kleinkreisen

Auf der Kugel unterscheidet man zwei Arten von Kreisen (Abbildung 18). Die *Großkreise* (durchgezogene, fette Linien) haben den gleichen Durchmesser wie die Kugel (das sind auf der Erde die Meridiane und der Äquator), die Kleinkreise (punktierte, fette Linien) haben einen kleineren Durchmesser. Großkreise gehen nicht notwendigerweise durch die Pole der Kugel. Alle Regeln der sphärischen Trigonometrie gelten nur für Großkreise! Dreiecke, deren Seiten nicht auf Großkreisen liegen sind "ebene" Dreiecke (s. Kap. 3.5.1).

Ein bisschen umdenken muss man aber. Das sphärische Dreieck (Abbildung 19) entspricht nicht dem Kartendreieck aus der ebenen Trigonometrie. Es hat drei Seiten, die auf Großkreisen liegen müssen[14]. In der Navigation wird das *Nautische Dreieck* oder *Poldreieck* für Berechnungen benutzt. Eine seiner Ecken ist der Nordpol, zwei Seiten liegen auf Meridianen und die Verbindungslinie von Start- und Zielort liegt ebenfalls auf einem Großkreis. Zwischen den Seitenlängen des Kartendreiecks und denen des Poldreiecks besteht die Beziehung, dass im Kartendreieck die Breite vom Äquator aus angegeben wird und der Pol die Breite 90° hat.

Eine Segelyacht, die von A nach B segeln will, wird auf einem Großkreis als der kürzesten Entfernung auf der Kugel fahren. Die geografischen Koordinaten von A und B (Breite φ und Länge λ) sind bekannt (als Winkelangabe auf den Äquator bzw. den Null-Meridian bezogen). Das Poldreieck hat nun als dritte Ecke den (Nord-)Pol[15]. Damit kann man die Seiten des Poldreiecks, a und b, angeben: $a = 90° - \varphi_B$ und $b = 90° - \varphi_A$. Außerdem ist der Winkel γ zwischen a und b bekannt ($\gamma = \lambda_B - \lambda_A$). Gesucht sind die Seite c (die Entfernung zwischen A und B) und der (Anfangs-)Kurs, mit

[14] Alle Dreiecke auf der Kugel, deren Seiten nicht auf Großkreisen liegen, sind nicht sphärisch, sondern "eben".

[15] Damit ist sichergestellt, dass zwei Seiten es sphärischen Dreiecks sicher auf Großkreisen liegen.

dem bei A losgesegelt wird. Wir erkennen: eine typische Dreiecksaufgabe.

Die Umrechnung von Entfernungen in Grad in Seemeilenangaben ist nicht schwer. In der Navigation wird der Erdradius als konstant angesehen und eine Bogenminute auf dem Großkreis entspricht einer Seemeile[16]. Die Entfernung von A zum Pol in Seemeilen ist dann b = (90° - φ_B) * 60 (Bogenminuten/Grad).

Für die Berechnung von Entfernung c und Kurswinkel α brauchen wir also nur noch die Regeln.

1.5.1 Sätze im sphärischen Dreieck

Wie im ebenen Dreieck gibt es Sätze von Formeln, die die Beziehungen der Seitenlänge und der Winkel im sphärischen Dreieck ins Verhältnis setzen. Sie sehen etwas komplizierter aus, sind aber im Prinzip nicht anders als die Sätze im ebenen Dreieck. Die Ableitung ist etwas weniger anschaulich, aber natürlich gibt es auch ein Kapitel mit der Herleitung (Kap. 1.5.3). Da wir gesehen haben, dass die Seitenlänge mit dem Winkel im Verhältnis steht, können wir die Seitenlängen als Winkel angeben:

Seitencosinus-Satz:

$$\begin{aligned}
\cos a &= \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos\alpha \\
\cos b &= \cos c \cdot \cos a + \sin c \cdot \sin b \cdot \cos\beta \\
\cos c &= \cos b \cdot \cos a + \sin b \cdot \sin a \cdot \cos\gamma
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Winkelcosinus-Satz:

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \cos\beta \cdot \cos\gamma + \sin\beta \cdot \sin\gamma \cdot \cos a \\
\cos\beta &= \cos\alpha \cdot \cos\gamma + \sin\alpha \cdot \sin\gamma \cdot \cos b \\
\cos\gamma &= \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos c
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Sinus-Satz:

$$\sin a : \sin b : \sin c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma \tag{1.18}$$

[16] Dies gilt exakt nur für den Äquator, der Unterschied zu Meridianen ist aber gering (6,33 m). Für hochpräzise Berechnungen (z. B. beim militärischen Einsatz des GPS) muss man den lokalen Erddurchmesser (s. Geodundulation) berücksichtigen.

Wenn das sphärische Dreieck rechtwinklig ist (γ = 90°), vereinfachen sich die Sätze. Die Merkregel wurde von John Neper[17] bewiesen, deshalb heißt sie *Nepersche Regel*. Wir verwenden sie hier, weil wir schon genug Formeln gelernt haben.

1.5.2 Die Nepersche Regel

John Neper[17] hat eine einfache Merkregel für das Rechnen in rechtwinkligen sphärischen Dreiecken aufgestellt (γ = 90°). Damit fasst er einen Satz Formeln wie den Seitencosinus-Satz in Worte.

Das rechtwinklige sphärische Dreieck (Abbildung 20) wird beschrieben durch die Längen der beiden Katheten a und b, die Hypotenuse c und die beiden Winkel α und β (der Winkel γ ist 90°). Von den Katheten bildet man die Komplementäre a* = (90°-a) und b* = (90°-b), dann legt man eine Reihenfolge der "Stücke", die das Dreieck definieren fest: **b*, α, c, β, a***. Die in dieser Reihe benachbarten Stücke nennt Neper "anliegend".

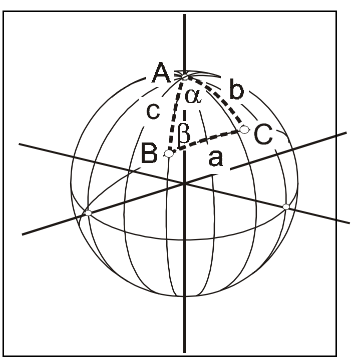

Abbildung 20: Die Nepersche Regel

Die Nepersche Regel lautet dann:

Nepersche Regel: Im rechtwinkligen sphärischen Dreieck ist der Cosinus eines jeden Stücks gleich dem Produkt der Cotangenten der anliegenden, oder gleich dem Produkt der Sinusse der nicht anliegenden Stücke (der rechte Winkel zählt nicht als Stück).

[17] John Napier (latinisiert Neper), schottischer Mathematiker (1550-1617), erfand den Rechenstab und veröffentlichte die ersten Logarithmentafeln.

Zur Anwendung der Neperschen Regel sucht man die bekannten Stücke und das gesuchte, und entscheidet dann, ob das Stück in der Reihe neben oder zwischen den beiden bekannten steht. Liegt das gesuchte Stück zwischen den bekannten, so ist sein Cosinus gleich dem Produkt der Cotangens der bekannten, liegt es getrennt in der Reihe, so ist sein Cosinus gleich dem Produkt der Sinusse der bekannten Stücke[18].

Zum Merken der Reihenfolge für das Anwenden der Neperschen Regel zeichnet man das Dreieck (Abbildung 21), und beginnt bei einer Kathete um das Dreieck herumzugehen (dabei geht man nicht über den rechten Winkel γ). Die Stücke schreibt man auf in der Reihenfolge, in der man daran vorbei kommt, also **a*, β, c, α, b*** oder **b*, α, c, β, a***.

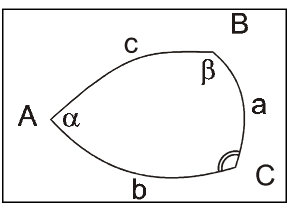

Abbildung 21: Zur Reihenfolge der Stücke in der Neperschen Regel

Man muss dann nur noch die Katheten durch ihre Komplemente ersetzen $a^* = a - 90°$ und $b^* = b - 90°$.[19]

1.5.3 Ableitung des Seitensinus-Satzes

Dieses Kapitel ist nur für Leser, die es *wirklich* wissen wollen. Zur Navigation reicht die Kenntnis der Sätze. Aber andrerseits braucht man sich die Sätze im sphärischen Dreieck nicht zu merken, wenn man sie herleiten kann.

[18] Wir müssen im Kopf behalten, dass die Katheten im sphärischen Dreiecks ja auch Winkeln entsprechen. Dann wird es verständlich, dass wir von Seiten den Sinus und den Tangens bilden können.

[19] Das sind die gleichen Kompletente wie bei den Komplementärwinkeln.

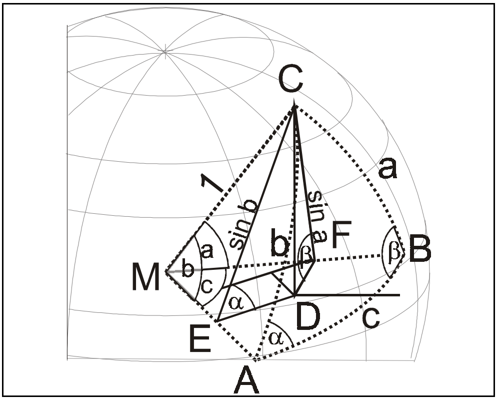

Abbildung 22: Zur Ableitung des Seitencosinus-Satzes

Zur Ableitung der Sätze im sphärischen Dreieck konstruiert man einen Dreikant[20] aus einem sphärischen Dreieck, indem man die Ecken des sphärischen Dreiecks mit dem Mittelpunkt der Kugel verbindet. Der Kugelradius wird r = 1 gesetzt. Diese Vereinfachung kennen wir von der Ableitung der Winkelfunktionen.

Der Dreikant M(ABC) wird durch drei ebene Flächen begrenzt: MAB, MAC, MBC, die Winkel zwischen den Flächen entsprechen den Seitenlängen des sphärischen Dreiecks.

Im Dreikant wird das Lot gefällt von C bis D auf der Ebene MAB. Außerdem werden Lote gefällt von D nach E und F (F liegt auf der Strecke MB). Dann stimmen die Winkel ∢CDE und ∢CFD mit den Winkeln α bzw. β im Kugeldreieck ABC überein.

Man überlegt nun, wie lang die Abschnitte auf den Strecken sind (da es lauter rechtwinklige ebene Dreiecke sind, ist das nicht schwer). Man erhält Abbildung 23:

[20] Ein Dreikant ist ein dreidimensionaler keilförmiger Ausschnitt aus der Kugel mit der Spitze im Kugelmittelpunkt M. Die Seiten des Dreiecks auf der Kugelfläche liegen auf Großkreisen.

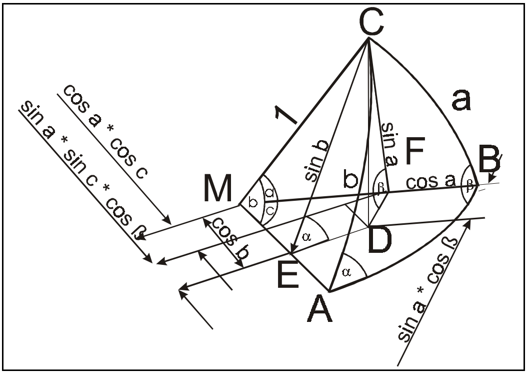

Abbildung 23: Zur Ableitung des Seitencosinus-Satzes

Aus den rechtwinkligen, ebenen Dreiecken MCE, MCF, CDE, CDF liest man ab.

$$CD = \sin a \cdot \sin\beta = \sin b \cdot \sin\alpha$$

$$CD = \sin a : \sin b = \sin\alpha \cdot \sin\beta \qquad (1.19)$$

$$\cos b = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos\gamma$$

daraus durch Umformen:

$$\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \qquad (1.20)$$

(für die anderen Seiten und Winkel analog). Daraus folgt der

Seitensinus-Satz:

$$\sin a : \sin b : \sin c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma \qquad (1.21)$$

Außerdem liest ab:

cos b = cos a * cos c + sin a * sin c * cos β

(für die anderen Seiten und Winkel analog). Daraus folgt der

Seitencosinus-Satz:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos\alpha$$

$$\cos b = \cos c \cdot \cos a + \sin c \cdot \sin b \cdot \cos\beta \qquad (1.16)$$

$$\cos c = \cos b \cdot \cos a + \sin b \cdot \sin a \cdot \cos\gamma$$

So viel zur Ableitung der Sätze im sphärischen Dreieck. Eigentlich ganz einfach, wenn man 'drauf kommt, wie die Hilfsdreiecke zu konstruieren sind. Weiter geht's mit Navigation.

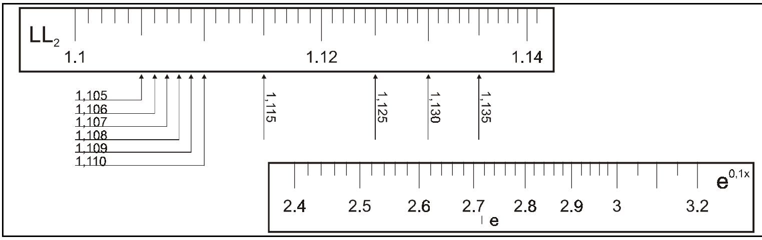

Abbildung 46: Die Enden der LL_2-Skala

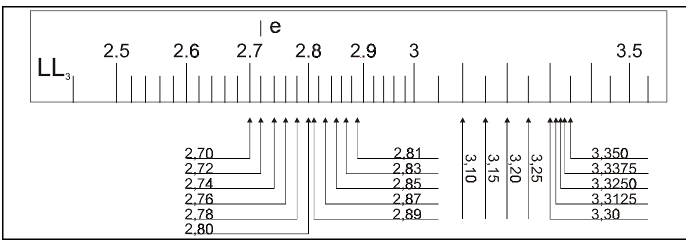

Abbildung 47: Die linke Seite der LL_3-Skala

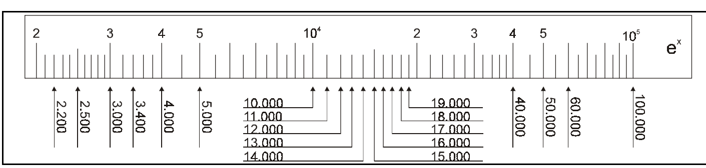

Abbildung 48: Die rechte Seite der LL_3-Skala

2.3 Die Logarithmen

Logarithmen sind Zahlen, die als Potenzen einer Basiszahl geschrieben werden. Es gibt im Prinzip Logarithmen zu jeder Zahl, die größer ist als 0[25]. Bekannt sind die zur Basis 10[26] und 2, in der Wissenschaft auch noch die "natürlichen Logarithmen *ln*" zur Basis der Eulerschen Zahl e = 2,71828....[27]. Sie basieren auf der Expo-

25 Der Logarithmus von Null ist nicht definiert, ebenso die Logarithmen von negativen Zahlen.

26 Die Logarithmen zur Basis 10 wurden 1615 von dem Mathematiker Henry Briggs (1561-1630) berechnet, und gelegentlich Briggsche Logarithmen genannt

27 Leonard Euler, Mathematiker, 1707 (Basel) - 1783 (St. Petersburg), hat umfassende Arbeiten zur Angewandten Mathematik veröffentlicht und die Mathemati-

nentialfunktion e^x, die Vorgänge in der Natur beschreibt, deren Ab- bzw. Zunahme ihrem Betrag entspricht (z. B. Kernzerfall, Zellwachstum).

Man kann jede Zahl größer als 0 als Potenz von, z.B. 10 (dekadische Logarithmen) oder e (natürliche Logarithmen) schreiben. Die 1 ist z. B. 10^0, 100 ist 10^2. Die 2 wäre $10^{0,30103}$. In den Logarithmentafeln gab man nur den Exponenten an, also lg 2 = 0,30103.

Die Idee[28] der Logarithmen ist, dass nach den Rechenregeln mit Potenzen, das Produkt zweier Potenzahlen die Potenz der Summe der Exponenten ist.

$$100 * 100 = 10^2 * 10^2 = 10^{2+2} = 10^4 = 10.000$$

Analog ist die Division von Potenzzahlen durch Differenzbildung des Exponenten zu erreichen. Damit war es vor der Verbreitung der Taschenrechner möglich, Zahlen mit vielen Stellen "mit der Hand" zu multiplizieren und zu dividieren. Man schlug in einer Logarithmentafel die Logarithmen der Zahlen nach und addierte oder subtrahierte sie. Das Ergebnis wurde dann wieder mit der Tafel entlogarithmiert. Zum Multiplizieren und Dividieren von Zahlen mit drei bis 4 Stellen war natürlich der Rechenschieber viel einfacher und handlicher.

2.4 Multiplizieren und Dividieren

Als es noch keine Taschenrechner und Computer gab, war das Addieren und Subtrahieren von Hand einfacher als das Multiplizieren und Dividieren von Zahlen mit 3 oder 4 Stellen. Genauso funktioniert der Rechenschieber: um zu multiplizieren addiert man 2 Strecken mit logarithmischer Einteilung, zur Division zieht man sie von einander ab.

Man nimmt also zwei gegen einander verschiebbare Lineale, die eine logarithmische Einteilung haben. Um nun 348 * 657 zu rechnen, addiert man zu der Strecke 348 auf dem unteren Lineal die Strecke 657 auf dem oberen.

sierung der Naturwissenschaften vorangetrieben. Als es noch keine Computer gab, wurden die Logarithmentafeln "mit der Hand" berechnet; dazu verwendete man die Reihenentwicklung.

28 Diese Tatsache war auch der Grund für den riesigen Erfolg der Logarithmentafeln bis zur Einführung der Taschenrechner.

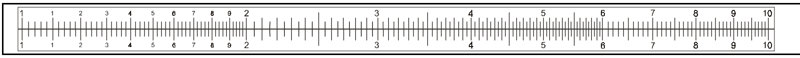

Abbildung 49: Die Skalen C und D in Grundstellung

Dazu verschiebt man ein Ende (mit der Zahl 1 oder 10) des oberen Lineals auf die Zahl 348 auf dem unteren. Dann geht man auf dem oberen Lineal zu der Zahl 657 und liest auf dem unteren Lineal das Ergebnis ab: 2285. Der Pferdefuß beim Rechenschieber ist, dass man die Kommastellen im Kopf berechnen muss. Also rechnet man überschlägig 300 * 600 = 180.000; das Ergebnis am Rechenschieber muss also größer sein als 200.000 (der Taschenrechner sagt 228.636). Wir füllen also die Zahl 2285 mit Nullen auf und erhalten: 228.500. Erinnern wir uns: der Rechenschieber rechnet mit 3 bis 4 signifikanten Stellen; im vorliegenden Falle wäre die letzte der vier Stellen unsicher. Hätten wir 3,48 mit 6,57 multipliziert, das Ergebnis wäre 22,85 gewesen: die Genauigkeit des Ergebnisses wäre auf zwei Kommastellen - wie die Angabe[29].

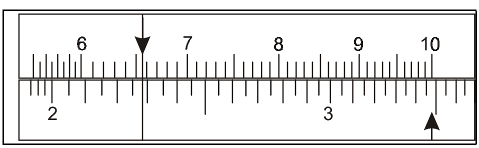

Abbildung 50: Die Multiplikation mit dem Rechenschieber

Zur Division werden Strecken subtrahiert. Rechnen wir eine Segelbootgeschwindigkeit aus. Das Boot ist 44,5 sm in 6 1/4 (6,25) Stunden gefahren.

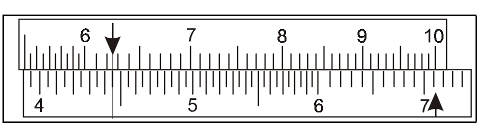

Abbildung 51: Die Division mit dem Rechenschieber

Wir stellen nun die Zahl 625 auf dem oberen Lineal über die Zahl 445 auf dem unteren. Das Ergebnis lesen wir unter der 10 (oder der 1) des oberen Lineals auf dem unteren ab: 712. Nun überschlagen wir die Rechnung, um das Komma setzen zu können: 42 / 6 = 7. Das Ergebnis lautet also 7,12 kn (der Taschenrechner sagt 7,12).

[29] Mit der Verbreitung von Taschenrechnern, die 8 oder 12 Stellen anzeigen, wurde es unmodern, sich Gedanken über unsinnige Genauigkeit zu machen. Eigentlich darf das Ergebnis einer Rechnung höchstens so viele Stellen haben wie die Angabe. Wenn man in der Navigation auf Grad genau rechnet, braucht man das Ergebnis nicht auf Sekunden genau (3 Kommastellen) anzugeben.

2.5 Mit Winkeln rechnen

Ein Rechenschieber hat typisch eine Sinus-/Cosinusskala, eine Tangens-/Cotangensskala und eine Arcusskala. Hier soll am Beispiel der Sinusskala das Rechnen mit Winkeln exemplarisch dargestellt werden.

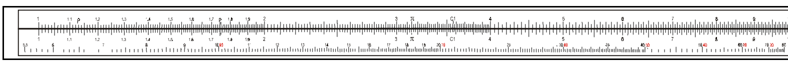

Abbildung 52: Die Sinusskala S und die Skalen C und D

Wir können nun den Sinus des Winkels 28° ablesen (Abbildung 53): eine Strichstärke weniger als 0,47 (der Taschenrechner ergibt 0,4697). Stellen wir den Läufer auf den Sinuswert ein, können wir gleich dividieren oder multiplizieren.

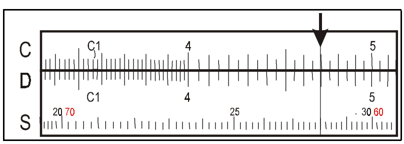

Abbildung 53: Winkel ablesen

Die Aufgabe 7,2 * 5,75 * sin 28° löst man mit dem Rechenschieber in folgenden Teilschritten. Zunächst wird der Läuferstrich über 28° auf Skala S gestellt. Dann die 10 der Zungenskala C unter den Läuferstrich. Nun wird der Läufer auf die Zahl 7,2 der Skala C geschoben und die Zunge nachgeführt, sodass die 10 der Skala C wieder unter dem Läufer steht. Für die Multiplikation mit 5,75 wird der Läufer auf 575 der Skala C geschoben und unter dem Läufer auf D das Ergebnis abgelesen: 1944. Wo gehört das Komma hin? 7 * 5 ist 35, der Sinus ist immer kleiner als 1 und von der Rechenschiebereinstellung erinnern wir, der von 28° ist ungefähr 0,4, also ist das Ergebnis 19,44 (der Taschenrechner zeigt das Ergebnis 19,436).

Die Aufgabe ist die Änderung der Längenkoordinate des Schiffsortes, wenn zwischen den beiden Orten 5 3/4 Stunden lang mit 7,2 kn der Kurs 28° gesegelt worden ist. Das Ergebnis sind Bogenminuten.

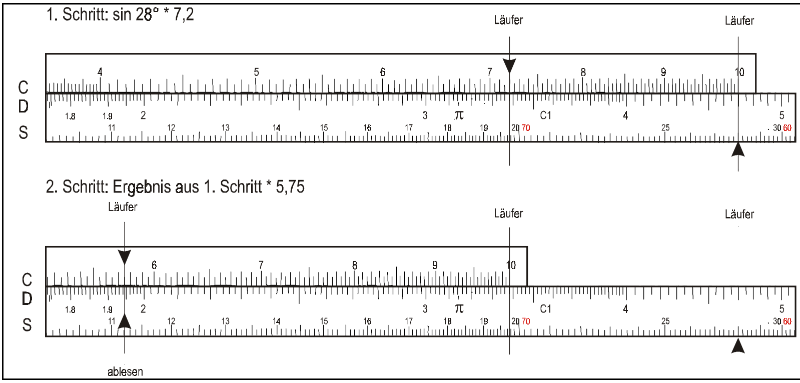

Abbildung 54: Mit Winkeln rechnen

2.6 Zusammenfassung

Wir haben uns an die typischen Skalen des Rechenschiebers erinnert und den Grund für die die logarithmische Teilung der Skalen aufgefrischt. Wir haben gesehen, wie Multiplikationen und Divisionen durch Addition bzw. Subtraktion von Strecken erfolgt. Und wir haben die Skalen der Winkelfunktionen angesehen und an einem Beispiel das Rechnen mit ihnen nachvollzogen.

Wer schon mit dem Rechenschieber gearbeitet hat, sollte jetzt wieder die Erinnerung aufgefrischt haben. Der Rest ist Übung. Vielleicht wäre jetzt die Zeit, den Rechenschieber in den Tiefen des Schreibtisches zu suchen. Wenn man Glück hat, findet man auch die Anleitung dazu und kann sich mit weiteren Anwendungen vergnügen. Wenn die Anleitung unauffindbar bleibt, können wir mit den konkreten Navigationsbeispielen üben. Stellen Sie sich die Reaktion der Mitsegler vor, wenn Sie beim Navigieren den Rechenschieber zücken und elegant den Schiffsort oder den Kurs bestimmen!

Tabelle 12: Tabelle zur Kursumwandlung

---> mit richtigem Vorzeichen rechnen
Vorzeichen umkehren <---
* im Uhrzeigersinn: +, im Gegenuhrzeigersinn: -

Kompass-Korrektur					Versetzung			
zu steuern-der Kurs	Ablen-kung durch Boot	misswei-sender Kurs	Misswei-sung	rechtwei-sender Kurs	Verset-zung durch Wind	Kurs durchs Wasser	Verset-zung durch Strö-mung	Kurs über Grund (Kar-tenkurs)
MgK	**Abl**	**mwK**	**MW**	**rwK**	**BW**	**KdW**	**BS**	**KüG**

So wie der Kurs müssen auch alle Peilungen mit Hilfe des Kompass um Missweisung und Ablenkung korrigiert werden, ehe man sie in die Karte einträgt oder nach einen der Karte entnommenen Kurs steuert. Trickreich ist die Ablenkung. Sie hängt ja von der Stellung des Kompass im Boot und von der Kielrichtung zum Erdmagnetfeld ab. Bei der Seitenpeilung mit einer Peilscheibe muss der Schiffskompasskurs korrigiert werden. Bei der Peilung mit einem Peilkompass hat man das Problem, man kennt die Ablenkung nicht (die ist ja auf den Standort des Schiffkompass bezogen). Mit entsprechender Vorsicht sollte man also solche unkorrigierten Peilungen verwenden. Eine Lösung wäre, eine Ablenkungstabelle für den Peilkompass an den üblichen Stellen im Boot zu erstellen; aber wer nimmt die Mühe schon auf sich....

Tabelle 13: Tabellen zur Peilungsumwandlung

Seitenpeilung

gepeilte Richtung	gesteuerter Kurs	gepeilte Richtung	Ablenkung durch Boot	misswei-sende Peilung	Miss-weisung	rechtwei-sende Peilung
SP	**MgK**	**MgP**	**Abl**	**mwP**	**MW**	**rwP**

Handpeilung

gepeilte Richtung	Ablenkung durch Boot	missweisende Peilung	Missweisung	rechtweisende Peilung
MgP	**Abl**	**mwP**	**MW**	**rwP**

Achtung: bei der Handpeilung ist die Ablenkung für die Schiffskompassrichtung der Ablenkungstabelle zu entnehmen!

3.3 Standortbestimmung

Bei der terrestrischen Navigation bestimmt man den Standort mit seinen Breiten- und Längenkoordinaten als Schnittpunkt mindestens zweier Standlinien[39]. Standorte erhält man durch Koppeln oder aus dem Schnittpunkt zweier Standlinien. Die Standlinien bestimmt man durch Peilung von Objekten bekannter Position, aus Entfernungsmessungen zu bekannten Objekten, und durch Loten als Tiefenlinie in der Karte.

Für trigonometrische Lösungsansätze gibt die Standlinie aus der Tiefenlotung nichts her. Man braucht die Karte und die Peilung (nach Umwandlung der MgP in die rwP) kann direkt in die Karte eingezeichnet werden. Wenden wir uns den anderen Methoden zu.

3.3.1 Schiffsort durch Koppeln

Ein gekoppelter Schiffsort wird bestimmt von einer bekannten Position aus (z.B. einem Hafen) durch Berechnen der gefahrenen Strecke und der Richtung, die man gefahren ist. Man muss also die Fahrtzeit, die Geschwindigkeit und den gesteuerten Kurs kennen. Am besten schreibt man es ins Schiffstagebuch, dann findet man es. Das GMDSS-Abkommen schreibt den gewerblichen Schiffen der teilnehmenden Ländern eine Positionsbestimmung alle zwei Stunden vor[40]. In schwierigen Revieren mag es häufiger notwendig sein. Sicher wird man bei Kursänderungen einen Schiffsort bestimmen.

Schon bei der Berechnung der Fahrtstrecke aus der Fahrtzeit und der Geschwindigkeit spielt der Rechenschieber seine Stärke aus. Die Geschwindigkeit *v* ist ja der Quotient aus Fahrtstrecke *c* und Fahrtzeit *t*, woraus sich die Benennung km/h oder sm/h ergibt.

$$v = \frac{c}{t} \tag{3.1}$$

Durch arithmetische Umformung (beide Seiten der Gleichung werden mit *t* multipliziert, auf der rechten Seite kürzt sich *t* heraus) erhält man:

$$c = v \cdot t \tag{3.2}$$

39 Standlinien sind nicht notwendigerweise gerade Linien!

40 Es soll an dieser Stelle nicht verschwiegen werden, dass man den Schiffsort auch durch GPS bestimmen kann.

Man muss also das Produkt von Geschwindigkeit *v* und Zeit *t* bilden. Das kann man wie gewohnt mit den Skalen C und D machen. Wenn die Zeit in Minuten gemessen wird, geht es aber eleganter mit den Skalen A und B (die Quadratskalen) des Rechenschiebers (Abbildung 64). Die Geschwindigkeit in Knoten auf B stellt man unter die 60 (60 min. = 1 Std.) der Skala A. Schiebt man nun den Läuferstrich über die tatsächliche Fahrtzeit in Minuten auf A, kann man darunter auf B direkt die Fahrstrecke ablesen. Dieser einfache Trick erspart uns das Abschätzen der Kommastelle.

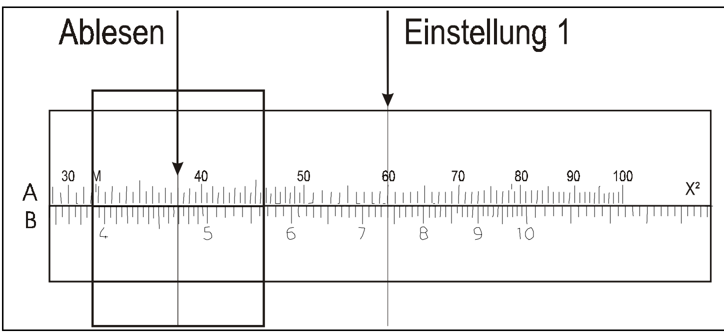

Abbildung 64: Fahrtstrecke aus Zeit und Geschwindigkeit

Man liest für die gefahrene Strecke nach 38 min. bei 7,4 kn 4,7 sm ab. Für jede andere Zeit bei gleicher Geschwindigkeit könnte man durch einfaches Verschieben des Läufers auf die Fahrtzeit ebenfalls bestimmen.

Mit den Skalen C und D kann man die Aufgabe natürlich ebenfalls lösen - aber mit mehr Schieberei. Man rechnet $c = (v * t) / 60$, also: die 10 auf Skala C über die 74 auf Skala D, Läufer über 38 auf Skala C, Zunge verschieben, sodass 6 auf Skala C unter dem Läuferstrich steht, und unter der 10 auf C das Ergebnis auf D ablesen. Nun die Kommastellen überschlagen: 7 * 40 ist ungefähr 280, geteilt durch 60 ist ungefähr 8; das Ergebnis hat eine Stelle vor dem Komma und liegt um 8.

Will man die Geschwindigkeit aus der Fahrtstrecke und der Zeit berechnen, weil man die Entfernung zweier beobachteter Orte hat, dann stellt man die Fahrtstrecke auf B unter die Fahrtzeit auf A. Unter dem Läuferstrich über 60 auf A liest man dann die Geschwindigkeit ab. Wenn man für die Entfernung von 9,5 sm zwischen zwei O_b 75 min. gebraucht hat, betrug die Geschwindigkeit 7,9 kn (Abbildung 65).

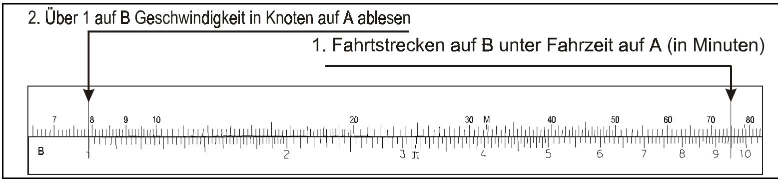

Abbildung 65: Geschwindigkeit aus Zeit und Strecke

Nun aber zur trigonometrischen Aufgabe. In der Karte sieht die Aufgabe wie in Abbildung 37 aus. Wegen der Kartenprojektion sehen wir ein rechtwinkliges Dreieck mit der Fahrtstrecke c als Hypotenuse. Der Winkel α ist der rechtweisende Kurs, rwK. Wir müssen also zuerst mit Ablenkung und Missweisung den rwK berechnen (müssten wir auch, wenn wir die übliche zeichnerische Lösung suchen). Sagen wir, der rwK ist 28°.

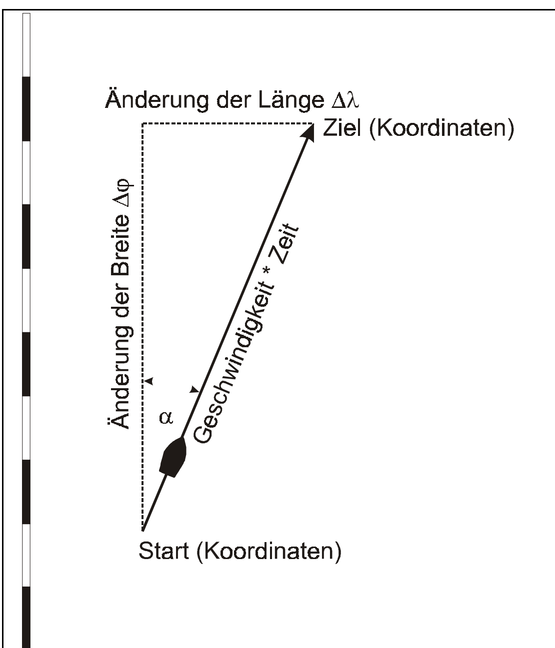

Abbildung 66: Berechnen der Koordinaten des Koppelortes

Gesucht sind ja die Breitenänderung $\Delta\varphi$ und die Längenänderung $\Delta\lambda$. Beides sind die Katheten des Dreiecks. Also können wir die Definition von Sinus und Cosinus anwenden:

- das Verhältnis der Gegenkathete zur Hypotenuse heißt **Sinus,**
- das Verhältnis der Ankathete zur Hypotenuse heißt **Cosinus.**

Durch Umformen erhalten wir:

$$\Delta\varphi = c \cdot \cos\alpha$$
$$\Delta\lambda' = c \cdot \sin\alpha \qquad (3.3)$$

Da wir *c* schon als zurückgelegte Wegstrecke *c* berechnet haben, ist die Aufgabe eine einfache Multiplikation mit einer Winkelfunktion.

$$\Delta\varphi = 4{,}7 * \cos 28°$$

$$\Delta\lambda' = 4{,}7 * \sin 28°$$

Halt! Auf einem Breitengrad ist eine Bogenminute ja nicht gleich einer Seemeile! Wir müssen noch die Breite berücksichtigen. Dazu verwendet man die mittlere Breite φ_m von Ausgangs- und Zielort. Zuerst berechnen wir die Breitenänderung $\Delta\varphi$.

Wir stellen also den Läuferstrich über 28° auf der Skala S, die 10 der Skala C unter den Läuferstrich und verschieben den Läufer über 47 auf Skala C; darunter lesen wir auf D ab: 22. Da wir mit Seemeilen gerechnet haben und eine Seemeile einer Bogenminute entspricht, ist das Ergebnis in Minuten. Der Sinus ist immer kleiner als 1, also ist das Ergebnis: die Breite hat sich um 2,2' geändert. Auf der Nordhalbkugel müssen wir also 2,2' zu der Breitenkoordinate des Ausgangsortes addieren.

Nun können wir die mittlere Breite φ_m bestimmen:

$\varphi_m = \varphi_A + \Delta\varphi/2$.

Für die Längenänderung $\Delta\lambda'$ stellen wir den Läuferstrich auf 28° der Cosinus-Skala (ebenfalls S, aber von rechts nach links), oder wir bilden den Sinus des Komplementärwinkels 90° - 28° = 62°. Die Multiplikation geht dann wie eben und das Ergebnis beträgt 415. Die Überschlagsrechnung liefert 4,15' als Ergebnis. Jetzt bringen wir die Korrektur für die Mercatorverzerrung an:

$$\Delta\lambda = \frac{\Delta\lambda'}{\cos\varphi_m} \qquad (3.4)$$

Wenn wir auf der Position 54° 11' N begonnen haben zu koppel, ist die mittlere Breite φ_m = 54° 13' N = 54,22° N. Zur Bestimmung der Längenkoordinatenänderung teilen wir also 4,15' durch cos 54,22° = 0,584 und erhalten $\Delta\lambda$ = 7,1'. Da wir einen östlichen Kurs hatten, müssen wir die $\Delta\lambda$ = 7,1' östlich von Greenwich zu der Ortslänge addieren, westlich subtrahieren.

Die so berechneten Koordinaten des Koppelortes O_k werden nun in die Seekarte eingetragen und die Berechnung durch eine Messung des Winkels und der Entfernung überprüft.

Wie geht man vor, wenn der rechtweisende Kurs größer ist als 90°? Wenn also der Koppelort bestimmt werden soll, wenn das Schiff mit 6,5 kn fuhr und 4 Std. lang den Kurs 125° gehalten hat?

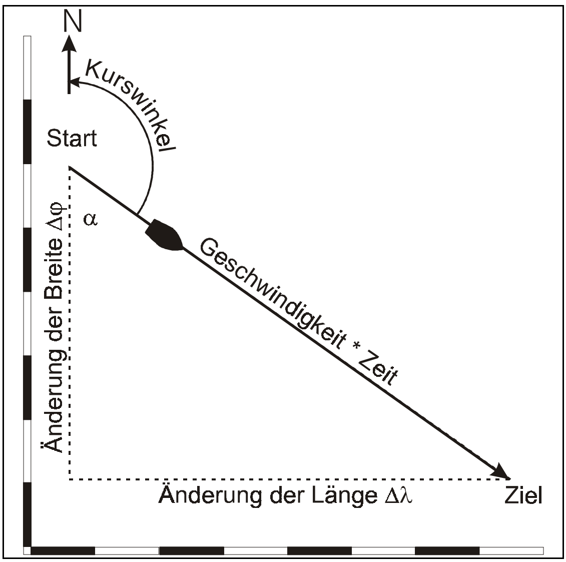

Abbildung 67: Berechnen des Koppelortes bei rwK > 90°

Der Winkel im rechtwinkligen Dreieck, mit dessen Sinus und Cosinus die Hypotenuse multipliziert wird, ergibt sich als Komplementärwinkel 90° - rwK. Liegt südwestlicher Kurs an (180° < rwK < 270°) ist α = 180° - rwK und bei nordwestlichem Kurs (270° < rwK < 360°) rechnet man α = 360° - rwK. Wenn man mit dem Rechenschieber anfängt, ist es immer hilfreich, eine Skizze anzufertigen. Man sieht dann auch gleich, ob die Koordinatenänderung zu den Koordinaten des Ausgangsortes addiert oder davon subtrahiert werden muss.

Gekoppelte, oder gegißte[41], Positionen sollten mit der notwendigen Skepsis beurteilt werden, wenn man nicht die Versetzung durch Strom und/oder Wind einigermaßen zuverlässig berücksichtigen kann. Hat man Informationen über die Stromstärke und -richtung, sollten die unbedingt in die Ortsbestimmung einfließen.

[41] Das Wort "gissen" kommt aus dem Altniederländischen und bedeutet "schätzen". Im Englischen heißt das "dead reckoning"; dabei ist "dead" eine Verbalhornung von "deducted" (also: abgeleitete Schätzung).

Das kann auf zweierlei Weise erfolgen. Entweder berücksichtigt man die Versetzung bei der Berechnung des rwK aus dem MgK (sieheTabelle 12, S. 70). Oder man berechnet die Koordinaten des Koppelortes wie eben beschrieben und trägt in der Karte den Stromvektor (Richtung und Länge) ein. Der Koppelort liegt dann an der Spitze des Strömungs- oder Windversetzungsvektors.

3.3.2 Schiffsort durch Bestimmen der Entfernung

Eine der Standlinien für die Positionsbestimmung kann der Kreis um ein Objekt bekannter Koordinaten sein, z.B. ein Leuchtturm oder ein in der Seekarte eingezeichneter Turm. Der Radius des Kreises entspricht der Entfernung zum Objekt. Die zweite Standlinie ist dann typisch die Peilung des Objektes. Kriterien sind, dass die Höhe des Objektes bekannt ist, und man hat einen Sextanten an Bord. Nehmen wir als Beispiel einen Leuchtturm. Nun können wir zwei Fälle unterscheiden: wir sind dicht genug an dem Leuchtturm um ihn in voller Höhe zu sehen, oder der Leuchtturm taucht gerade über der Kimm auf. Dieser zweite Fall eignet sich besonders, wenn man sich in der Morgendämmerung der Küste von hoher See nähert und der Schiffsort über Nacht nur gekoppelt worden ist. Erfahrene Segler achten darauf, dass sie während der Dämmerung in Sichtweite einer Küste kommen. Dann kann man sowohl das Feuer an seiner Kennung[42] eindeutig identifizieren als auch die Peilung verlässlich durchführen. Bei Dunkelheit sieht man nämlich den Schein über dem Horizont (Tragweite), ehe man die Lichtquelle selbst im Blickfeld hat (Sichtweite), und man hat ein paar Minuten um die Kennung auszuzählen und im Leuchtfeuerverzeichnis nachzuschlagen.

3.3.2.1 Entfernung aus der Höhe eines vollständig sichtbaren Objektes (Höhenwinkelmethode)

Ehe man daran geht, den Winkel zu messen, unter dem man einen Leuchtturm sieht, muss man sich im Leuchtfeuerverzeichnis vergewissern, welche Höhe angegeben wird. In deutschen Leuchtfeuerverzeichnissen werden die Höhe des Firstes über Grund angegeben. In der englischen *Admirality List of Ligths* wird die Höhe der Lichtquelle über dem mittleren Hochwasser angegeben. Die Höhenangaben in Seekarten beziehen sich auf die Leuchtfeuerhöhe, aber die Bezugsflächen (Kartennull) sind uneinheitlich. In deutschen Karten sind deutsche Leuchtfeuerangaben auf den mittleren

[42] Leuchtfeuerverzeichnis!

3.4 Kursbestimmung

Im vorigen Abschnitt haben wir den Rechenschieber eingesetzt um heraus zu bekommen, wo wir sind. Nun wollen wir ihn benutzen um dorthin zu kommen, wo wir hin wollen. Dazu müssen wir einen Kurs steuern. Unsere trigonometrischen Berechnungen unterscheiden sich aber von den Arbeiten in Mercatorkarten. Die Berechnungen finden statt auf einer eingeebneten Kugeloberfläche, ohne Verzerrung durch eine Kartenprojektion (der Fehler ist bei üblichen Tagesreisen mit dem Segelboot vernachlässigbar klein).

Der große und gewöhnungsbedürftige Unterschied ist, dass die Bogenminute auf dem Großkreis einer Seemeile entspricht. Die Großkreise sind die Meridiane, also die Längenkreise. Der Umfang der Breitenkreise, den Kleinkreisen auf der Kugel, ist immer kleiner als der Äquatorumfang. Deshalb gilt hier für die Seemeile im Bezug auf die Bogenminute[48]:

$$\text{Entfernung in sm} = \text{Entfernung in Bogenminuten} / \cos \varphi$$

Die Koordinaten werden vom Äquator (0°) aus nach Norden und Süden bis 90° (Pole) gezählt (Abbildung 76). Dies bereitet keine Schwierigkeiten, denn die Werte der Winkelfunktionen sind eindeutig zwischen 0° und 90°. Um den Äquator herum wird aber vom Greenwich-Meridian (0°) nach Osten und Westen bis 180° gezählt. Hier müssen wir aufpassen, denn die Winkelfunktionen ändern - bis auf den Sinus - ihr Vorzeichen beim Überschreiten der 90° Grenze (Tabelle 5). Ein wenig Nachdenken beim Bilden der Längendifferenzen ist auch nötig, wenn der Törn die 0°- oder die 180°-Grenze überschreitet. Aber mit einer Skizze ist das alles zu bewältigen.

[48] Die Seemeile ist ja definiert als der (360 * 60)ste Teil des Äquatorumfanges, das ist eine Bogenminute. Der Erdumfang am Äquator beträgt 40.075,4 km, der Umfang über die Pole 39.940,9 km; der Unterschied beträgt also 134,5 km, oder pro Bogenminute 0,00633 km = 6, 33 m. Für die praktische Navigation hat dieser Unterschied nur theoretische Bedeutung.

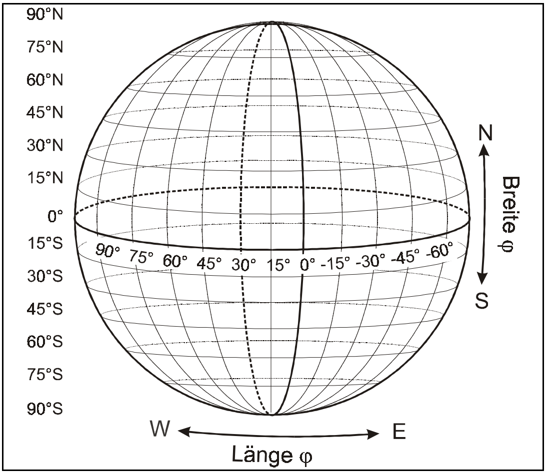

Abbildung 76: Koordinatengitter auf der Erdkugel

3.4.1 Kurs und Entfernung aus den Ortskoordinaten

Die in diesem Abschnitt verwendete Mittelbreitenmethode zur Berechnung kann auf Entfernungen bis etwa 100 sm angewandt werden. Darüber hinaus ist die Methode der erweiterten Breite zu verwenden, die im Kapitel 3.5.1 erläutert wird.

Aufgabe 3

Bestimme Kartenkurs und Entfernung von Calais (φ = 50°58' N, λ = 001°51' E) nach Helgoland (φ =54°11' N, λ = 007°53' E).

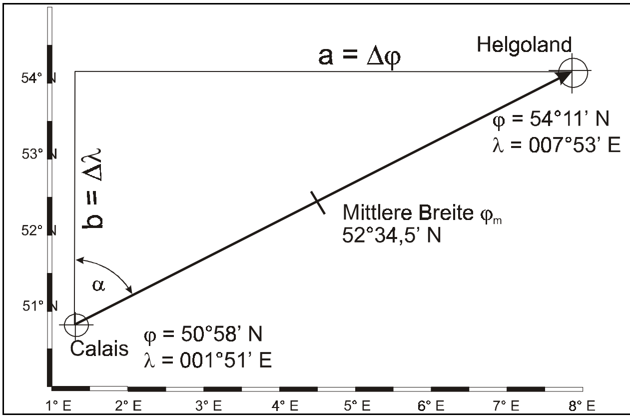

Abbildung 77: Kursbestimmung aus den Ortskoordinaten

Das Dreieck in der Skizze ist rechtwinklige mit den Katheten a = Längendifferenz und b = Breitendifferenz und mit der Hypotenuse Entfernung; der Winkel α ist der Kartenkurs (KaK/KüG).

Im rechtwinkligen Dreieck ist das Verhältnis Gegenkathete zu Ankathete gleich dem Tangens des Winkels: $\tan \alpha = a/b$.

VORSICHT FALLE: Nach der Nomenklatur in Dreiecken muss α der spitzeste Winkel sein. Die Abbildung sieht aus, als wäre der Kurswinkel α tatsächlich der spitzeste. Aber die obige Abbildung stellt die Karte in Mercator-Projektion dar! Tatsächlich müsste der Kurswinkel ß heißen. Und die Formel für den Kurs $\cot \alpha = b/a$.

Aber es liegt dem spitzesten Winkel immer die kürzeste Seite gegenüber. Deshalb brauchen wir zur Lösung einer Kursaufgabe nicht einmal eine Skizze: wir teilen einfach die längere Strecke (egal ob Breitendifferenz oder Längendifferenz) durch die kürzere und lesen den Tangenswert ab. Wenn die Breitendifferenz größer ist als die Längendifferenz, dann ist das der Kurswinkel. Ist die Längendifferenz größer als die Breitendifferenz, müssen wir den Komplementärwinkel berechnen um den Kurs zu erhalten - oder den Cotangens ablesen.

Zur Berechnung der Entfernung von Calais nach Helgoland benutzen wir den Sinussatz im rechtwinkligen Dreieck: die Länge der Hypotenuse entspricht der Kathetenlänge / sin(*Gegenwinkel*).

Die Längendifferenz ist jedoch abhängig von der Breite ($\lambda' = \lambda / \cos \varphi$). Wir kommen nicht um das Aufzeichnen einer Tabelle herum:

	Geogr. Breite φ	**Geogr. Länge λ**
Calais	50°58' N = 50,967° N	001°51' E = 001,85° E
Helgoland	54°11' N = 54,183° N	007°53' E = 007,883° E
Unterschied (in °)	3°13' N = 3,216° N	6°02' E = 6,033° E
Unterschied (in ')	193' = 193 sm	362'
mittlere Breite φ_m	52°34,5' N = 52,575° N	

Zur Umrechnung der Längendifferenz in Seemeilen verwendet man die mittlere Breite der beiden Orte φ = 52,575°. Da die Winkelskalen des Rechenschiebers eine Dezimalteilung haben, müssen die Grad/Minutenangaben in Dezimalgrad umgerechnet werden. (Grad + Minuten / 60 '/°). Außerdem geben wir die Längen- und Breitenunterschiede in Bogenminuten an (Grad * 60 '/°)

Zunächst berechnen wir die Länge der Strecke a in Seemeilen und benutzen dazu die mittlere Breite φ_m[49]:

Erste Rechnung:

$$\begin{aligned} \lambda\,' &= \Delta\lambda \cdot \cos\varphi_m = \\ &= 362\,' \cdot \cos 52{,}575° = 220\,sm \end{aligned} \tag{3.27}$$

Läufer über 52,575° auf Skala S, 10 der Skala C unter den Läufer, Läufer auf 362 auf Skala C, auf Skala D ablesen: 220.

Zweite Rechnung:

Da ja die Breitendifferenz auf dem Meridian gemessen wird, entspricht die Anzahl Bogenminuten, die Helgoland nördlich von Calais liegt, der Anzahl Seemeilen. Wir können nun direkt den Kurswinkel ausrechnen und erhalten den Kartenkurs KaK.

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \tan\alpha = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\lambda\,'} = \\ &= \frac{193\,sm}{220\,sm} \Rightarrow \alpha = 48{,}75° \end{aligned} \tag{3.28}$$

Läufer über 193 auf Skala D, 220 auf Skala C unter den Läufer, Läufer auf 10 der Skala C, auf Skala T (rot: cot) ablesen: 48,85

Dritte Rechnung:

Nun brauchen wir noch die Entfernung und erinnern uns mit einem Blick auf die Skizze, dass der Sinus von α gleich Gegenkathete a: Hypotenuse c ist; also:

[49] Diese "Methode der mittleren Breite" ist eine Näherung. Der Fehler ist vernachlässigbar, wenn die Entfernung nicht größer als 10° und der Breitenunterschied nicht größer als 5° ist. Für größere Entfernungen muss man aus der Integralrechnung abgeleitete Formeln verwenden, wie es in Kap. 3.5.1 erklärt ist.

$$c = \frac{a}{\sin\alpha} = \qquad (3.29)$$
$$= \frac{220sm}{\sin 48{,}75°} = 293sm$$

Läufer auf 48,85 auf Skala S, 220 auf Skala C unter Läufer, Läufer auf 1 der Skala C, Zunge in Ausgangslage (1 auf C über 1 auf D), unter Läufer auf Skala CI ablesen: 293 (wir haben gerechnet 1/(sin 48,85/220) nach den regeln der Kettenrechnung zur Vermeidung von unnötigem Verschieben der Zunge).

Nun den KaK = α in der Karte eintragen auf freie Passage prüfen (Seezeichen, Untiefen), KaK in Kompasskurs (MgK) umrechnen unter Verwendung von Missweisung, Ablenkung und Strom- und Windbeschickung.

In diesem Beispiel lag das Ziel nordwestlich vom Ausgangspunkt der Reise. Wie sieht die Rechnung aus, wenn das Ziel südwestlich liegt?

Aufgabe 4

Ein Schiff will von Helgoland (φ =54°11' N, λ = 007°53' E) nach Norderney (φ =53°42' N, λ = 007°10' E) fahren. Bestimme Kartenkurs und Entfernung.

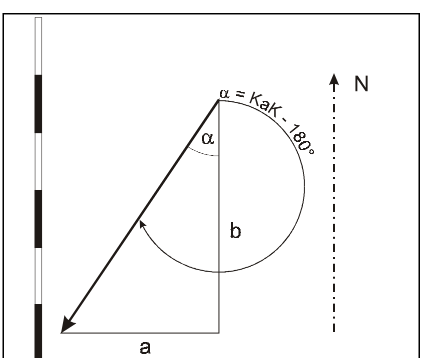

Abbildung 78: Kursbestimmung aus den Ortskoordinaten

	Geogr. Breite φ	Geogr. Länge λ
Helgoland	54°11' N = 54,183° N	007°53' E = 007,883° E
Norderney	53°42' N = 53,700°	007°10' E = 007,267°
Unterschied (in °)	0°29' = 0,483°	0°43' = 0,712°
Unterschied (in ')	29' = 29 sm	43'
mittlere Breite	53°56,5' N = 53,942° N	

mit einer Linie. Dann bestimmt man die Zeit vor bzw. nach Hochwasser am Bezugsort für den aktuellen Tag (es tritt im Beispiel um 08:15h ein). Wenn wir für 10:00h die Wasserhöhe bestimmen wollen, wäre das 01:45h = 1,75h nach Hochwasser.

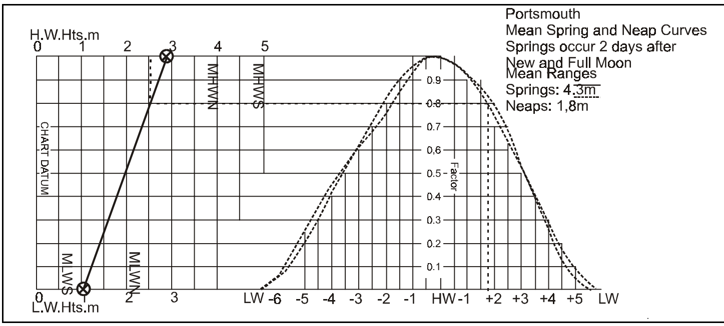

Abbildung 107: Ablesen des Tidenstandes

In der Tidenkurve geht man vom Punkt +1,75h senkrecht nach oben bis zur Kurve und vom Schnittpunkt nach links zur Geraden des Anschlussortes. Die Wasserhöhe um 10:00h liest man dann auf der oberen Skala ab: 2,55m.

Natürlich kann man auch den Faktor in dem Tidenkurvendiagramm ablesen (im Beispiel 0,8) und den Wasserstand berechnen nach der Formel:

$$H = (HWH - NWH) \cdot Faktor + NWH \qquad (4.9)$$

$$H = (2,9\ m - 1,05\ m) * 0,8 + 1,05\ m = 2,53\ m$$

4.2.5 Höhenberechnung ohne Tidenkurven

4.2.5.1 Aus den Gezeitentafeln des BSH

Die Wasserstandsänderung der Gezeit kann - wie wir gesehen haben - in eine Anzahl sinusförmiger Wellen zerlegt werden. In unseren Breiten, also in der Nordsee und im Englischen Kanal, herrscht der Einfluss der halbtägigen Mondtide vor, d.h. der zeitliche Wasserstandsverlauf kann mit einer Sinusfunktion angenähert werden. Allerdings muss man berücksichtigen, dass sich die Fall- und die Steigkurve in aller Regel von einander unterscheiden.

An Parametern kann man den Gezeitentabellen für Bezugsorte die Steig- und die Fallhöhe entnehmen und man kann die Steigund die Falldauer ermitteln. Die Steighöhe ist der Unterschied von Niedrigwasserhöhe und darauffolgender Hochwasserhöhe, analog ist der Unterschied zwischen Hochwasserhöhe und folgender Niedrigwasserhöhe die Fallhöhe. Die Steigdauer ist dann der Zeitunterschied zwischen Niedrigwasserzeit und Hochwasserzeit, die Falldauer der Zeitunterschied zwischen Hochwasserzeit und Niedrigwasserzeit.

Geschickterweise bezieht man die Kurve auf den Zeitabstand von der Hochwasserzeit und die Gezeitenhöhe auf den Niedrigwasserstand. Wir brauchen zur Berechnung nur den Teil der Wellenfunktion, die dem An- bzw. Abstieg der Wasserhöhe entspricht. Die gesuchte Funktion lautet:

$$H = \frac{TS}{2} \cdot (1 + \cos(180° \cdot \frac{ZU}{SD})) + NWH \qquad (4.10)$$

Dabei ist H die Wasserhöhe über Kartennull zum Zeitpunkt ZU Stunden vor bzw. nach Hochwasser. TS ist der Tidenstieg bzw. -fall, SD die Steig- bzw. Falldauer; NWH ist die Niedrigwasserhöhe. Für negative ZU, d.h. Zeiten vor Hochwasser, steigt die Kurve, für Zeiten nach Hochwasser (ZU positiv) fällt sie.

Dieser Abschnitt leitet die Formel für die Wassertiefe aus der Wellengleichung ab; er ist nur für Leser, die es genau wissen wollen. Alle anderen sollten am Ende des Abschnitts weiterlesen.

Wir hatten die Wellengleichung bereits eingeführt (Kap. 4.1.4).

$$y = A \cdot \sin(2\pi \cdot \frac{t}{T}) \qquad (4.2)$$

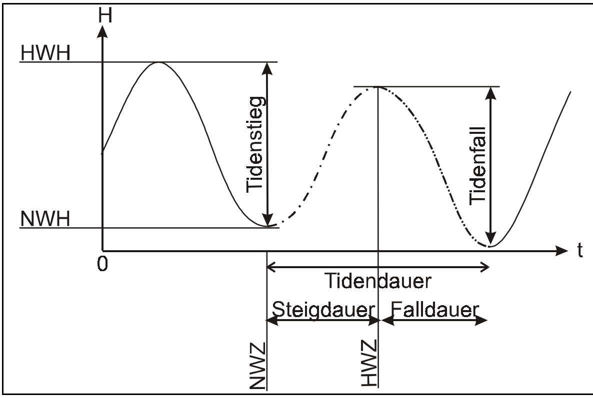

Abbildung 108: Annäherung der Tidenkurve durch eine Sinuswelle

Wir suchen den Teil der Wellengleichung, der in Abbildung fett gezeichnet ist. Dazu müssen wir den Nullpunkt verschieben: in t-Richtung (die horizontale x-Achse) um 270° oder 3/2 π und in H-Richtung um die Hälfte des Tidenhubs TD. Die Zeit T für eine ganze Schwingung ersetzen wir durch die doppelte Steigdauer SD.

Die Wellengleichung nimmt dann die Form an:

$$H = \frac{TS}{2} \cdot \sin(2\pi \frac{t}{2\,SD} + \frac{3}{2}\pi) + \frac{TS}{2} \qquad (4.11)$$

Im Argument des Sinus kürzen sich die Faktoren 2, wegen der Periodizität der Sinusfunktion können wir π wieder abziehen. Und da der Cosinus und der Sinus um 90° = $\pi/2$ verschoben sind, können wir den Sinus der Summe durch den Cosinus ersetzen. In der vollständigen Gleichung brauchen wir nun nur noch TS/2 auszuklammern und schon haben wir die gesuchte Gleichung (4.10).

Berechnen wir den Wasserstand am 16.04. um 15:45h in Spiekeroog. Dazu brauchen wir die Gezeitenwerte für Spiekeroog, die wir schon ausgerechnet haben:

Spring-Tide	1. NWZ	1. NWH	1. HWZ	1. HWH	2. NWZ	2. NWH	2. HWZ	2. HWH
Tide Spiekeroog	06:15	0	12:10	2,9	18:32	+0,2	00:30	3,1

TS = 2,9m - 0,2m = 2,7m,

SD ist 12:10h - 18:32h = 12,17h - 18,53h = -6,36h und

ZU = 12:10h - 15:45h = 12,17h - 15,75h = - 3,58h

$$H = \frac{2{,}7m}{2} \cdot (1 + \cos(180° \cdot \frac{3{,}58h}{6{,}36h})) + 0{,}2m = 1{,}28m$$

An dieser Stelle sehen wir, wie man diese Gleichung mit dem Rechenschieber berechnet, ohne dass es im einzelnen ausgeführt werden müsste. Die so berechnete Wassertiefe für Spiekeroog liegt 1,3m über der Kartentiefe - das Wasser wäre also 30cm tiefer als nach der Berechnung mit der mittleren Wassertiefe. Wir machen ohne Gezeitenkurve also einen Fehler. Überprüfen wir das am Beispiel der Gezeitenkurven für Helgoland und Norderney.

Ganz analog geht man für die Angaben aus den ATT vor. Zunächst berechnet man die Hoch- und Niedrigwasserzeiten und -höhen für den Anschlussort Lymington:

Tabelle 35: Berechnungsbeispiel nach ATT

	HWZ	**HWH**	**NWZ**	**NWH**
Portsmouth	08:15h	4,45m	13:52h	1,25m
Korrektur	-00:23h	-1,55m	-00:20h	-0,2m
Lymington	07:52	2,9m	13:32h	1,05m

Der Tidenstieg bzw. -fall TS ist dann die Differenz zwischen NWH und HWH (oder HWH und NWH), die Steig- bzw. Falldauer die Different von NWZ und HWZ (bzw. HWZ und NWZ). ZU ist die Zeitdifferenz vom Niedrigwasser zur Uhrzeit, für die Wasserhöhe berechnet werden soll.

Wir erstellen eine Steigkurve mit TS =MSpHWH - MSpNWH = 2,73 m - 0,00 m = 2,73 m und der Steigdauer SD = mSpD = 5,57 h und eine Fallkurve mit TS = MSpHWH - MSpNWH = 2,73 m - 0,00 m = 2,73 m und der Steigdauer SD = MSpD = 6,75 h (Abbildung 109). Die beiden Kurven werden vereinigt und über die Gezeitenkurve aus der Gezeitentabelle gelegt (Abbildung 110).

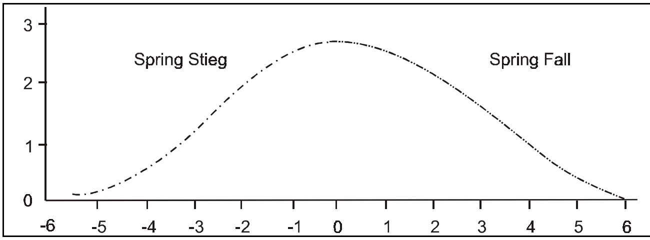

Abbildung 109: Annäherung der Tidenkurve durch zwei Halbwellen

Überlagerung mit der Mittleren Spring-Gezeitenkurve ergibt eine gute Übereinstimmung mit dem beobachteten mittleren Gezeitenverlauf. Der Fehler, den man bei der Höhenberechnung macht liegt deutlich unter 10 cm. Der Unterschied der so berechneten Kurve und der beobachteten erklärt sich aus dem Einfluss der zusätzlichen - bei der Berechnung aber nicht berücksichtigten - Mond- und Sonnenpartialtiden.

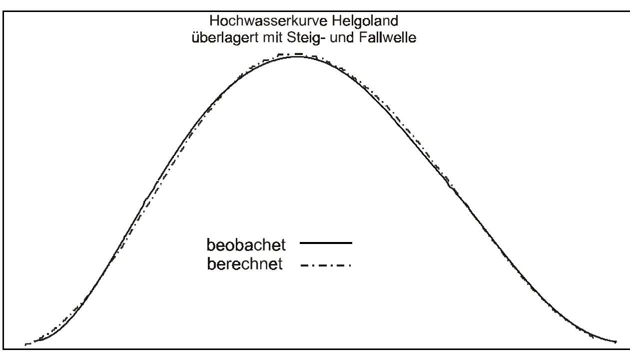

Abbildung 110: Fehlervergleich Tidenkurve 1 (Abbildung 103)

Die hier verwendete Cosinusfunktion Gl. (4.11) lässt sich mit dem Rechenschieber oder dem Taschenrechner leicht berechnen.

Wie groß ist der Fehler bei Gezeitenkurven, die nicht schlicht sind? Überlagern wir die Berechnete mit der beobachteten Gezeitenkurve von Norderney, Riffgat.

Stichwortverzeichnis